# 1. गुरुत्वाकर्षण

## स्वाध्याय

1. खालील तक्त्यातील तीनही स्तंभातील नोंदी मधील संबंध लक्षात घेऊन त्याप्रमाणे तक्ता परत लिहा.

| I | II | III |
|---|---|---|
| वस्तुमान | $m/s^2$ | केंद्राजवळ शून्य |
| वजन | kg | जडत्वाचे माप |
| गुरुत्व त्वरण | $Nm^2/kg^2$ | संपूर्ण विश्वात सारखे |
| गुरुत्व स्थिरांक | N | उंचीवर अबलंबून आहे. |

उत्तर :

| I | II | III |
|---|---|---|
| वस्तुमान | kg | जडत्वाचे माप |
| वजन | N | उंचीवर अबलंबून आहे. |
| गुरुत्व त्वरण | $m/s^2$ | केंद्राजवळ शून्य |
| गुरुत्व स्थिरांक | $Nm^2/kg^2$ | संपूर्ण विश्वात सारखे |

## 2. खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

**अ. वजन व वस्तुमान यातील फरक काय आहे ? एखाद्या वस्तूचे पृथ्वीवरील वस्तुमान व वजन मंगळावरही तेवढेच असतील का ? का ?**

उत्तर :

| वजन | वस्तुमान |
|---|---|
| i. वस्तूचे वजन म्हणजे, त्या वस्तूवर कार्य करणारे पृथ्वीचे गुरुत्व बळ होय.<br>ii. वजन सदिश राशी आहे.<br>iii. वजनाचे एकक : N dyneiv.<br>वस्तुची जागा बदलल्यास तिचे वजन बदलते. | i. एखाद्या वस्तूचे वस्तुमान म्हणजे त्या वस्तूत असलेल्या द्रव्य संचयाचे मापन.<br>ii. वस्तुमान अदिश राशी आहे.<br>iii. वास्तुमानाचे एकक : kg , g. iv.<br>वस्तूचे वस्तुमान सर्वत्र सारखेच असते. |

एखाद्या वस्तूचे पृथ्वीवरील वस्तुमान व वजन मंगळावरही तेवढेच राहणार नाही. वस्तुमान कायम राहील मात्र वजन बदलेल. कारण वस्तुमान म्हणजे पदार्थातील द्रव्य संचय हा सर्वत्र तेवढाच राहील तर वजन = mg होईल. येथे g म्हणजे त्या ग्रहाचे गुरुत्वीय त्वरण. गुरुत्वीय त्वरण त्या ग्रहाच्या वस्तुमानावर अवलंबून असते. ग्रहाची वस्तुमाने भिन्न असल्यामुळे, त्या ग्रहासाठी g भिन्न राहील म्हणून वजन भिन्न राहील.

## आ. मुक्तपतन, गुरुत्वत्वरण, मुक्तिवेग व अभिकेंद्री बल म्हणजे काय ?

उत्तर :

**i) मुक्तपतन :** जर एखादी वस्तू केवळ गुरुत्वीय बलाच्या प्रभावाने गतिमान असेल तर त्या गतीला मुक्त पतन म्हणतात. उदा. उंचावरून अलगद सोडलेली वस्तू खाली पडताना तिचे 'मुक्त पतन' होत नाही. कारण त्या वस्तूवर अन्य बले सुद्धा कार्य करतात. जसे हवेमुळे होणारे घर्षण, उत्प्लाविता बल. पण ही बाह्य बले नसल्यास उंचावरून सोडलेल्या वस्तूचे मुक्त पतन होते. निर्वात प्रदेशात मुक्त पतन शक्य आहे. तसेच कृत्रिम उपग्रहांचे परिवलन हे देखील मुक्त पतनाचे उदाहरण आहे.

**ii) गुरुत्वत्वरण :** पृथ्वीजवळील सर्व वस्तू पृथ्वीच्या गुरुत्वाकर्षणामुळे, पृथ्वीच्या केंद्राकडे आकर्षित होतात. पृथ्वीचे गुरुत्व बल वस्तूवर कार्य करते.ह्या बलामुळे वस्तूत त्वरण निर्माण होऊन वस्तू पृथ्वीच्या केंद्राकडे गतिमान होतात. ह्या त्वरणाला गुरुत्वत्वरण म्हणतात. गुरुत्व त्वरण g ह्या चिन्हाने दर्शवितात. ह्याची सरासरी किंमत g = 9.8m/s2 असते. पृथ्वीवर सर्व ठिकाणी g ची किंमत सारखी नसते.

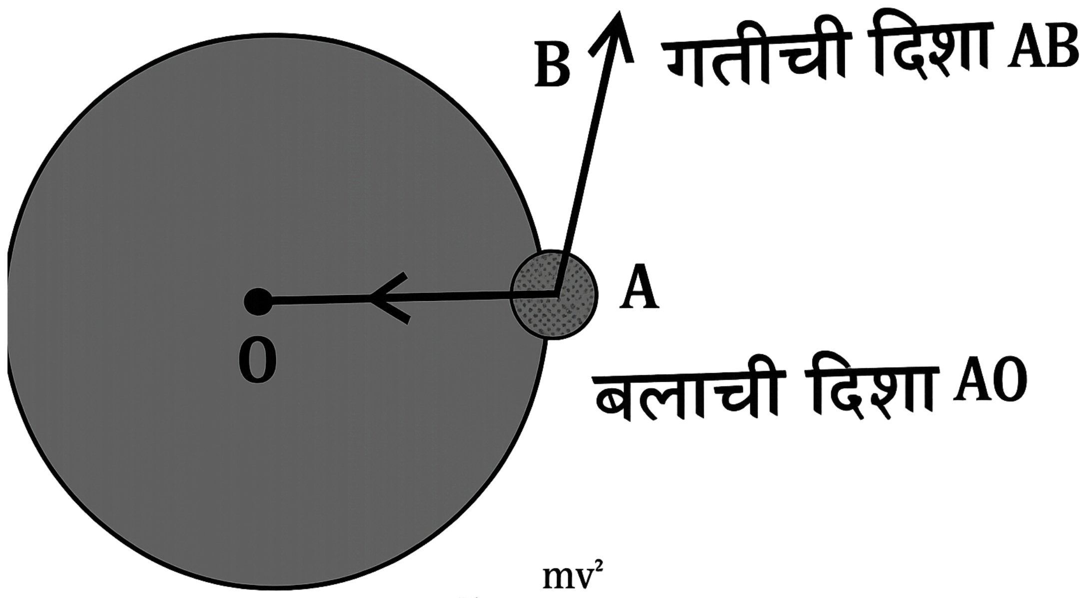
g ची किंमत वस्तूच्या पृथ्वी केंद्रापासूनच्या अंतरावर अवलंबून असते. केंद्रापासून दूर गेल्यास त्वरण कमी होते.

**iii) मुक्तिवेग :** साधारणत: एखादी वस्तू आपण जेव्हा वर फेकतो तेव्हा तिचा वेग कमी कमी होत जातो. विशिष्ट उंचीवर वेग शून्य होतो व त्या क्षणी ती वस्तू पुन्हा पृथ्वीकडे गतिमान होते व पृथ्वीवर पडते. आरंभिचा वेग जेवढा जास्त असेल तितकी ती वस्तू जास्तीत जास्त उंची गाठू शकेल.

आपण वस्तूचा आरंभिचा वेग वाढवत गेले तर ती वस्तू अधिकाधिक उंच जाईल व एक विशिष्ट आरंभिचा वेग असा असेल की त्या वेगाने फेकलेली वस्तू पृथ्वीच्या गुरुत्वीय आकर्षणावर मात करू शकेल व ती पृथ्वीवर पडणार नाही. आरंभ वेगाच्या या विशिष्ट मूल्यास मुक्तिवेग म्हणतात.

पृथ्वीसाठी मुक्तिवेग 11.2 km/s आहे. म्हणजे ह्या वेगापेक्षा जास्त वेगाने वस्तू फेकल्यास ती पृथ्वीवर परत येणार नाही.

**iv) अभिकेंद्री बल :** एखादी वस्तू एकसमान वर्तुळाकार गतीने गतिमान असल्यास त्या वस्तूवर केंद्राच्या दिशेने कार्य करणारे बल प्रयुक्त होते. ह्या बलाला अभिकेंद्री बल म्हणतात.




हे अभिकेंद्री बल $F = \frac{mv^2}{v^2}$ या सूत्राने ठरविता येते.

येथे m - वस्तूचे वस्तुमान, v - वस्तूचा वेग, r - परिवलन कक्षेची त्रिज्या. न्यूटनच्या गतिविषयक तिसऱ्या नियमानुसार अभिकेंद्री बलाच्या विरुद्ध दिशेने कार्य करणारे बल अस्तित्वात असते ह्याला अपसारी बल असे म्हणतात.

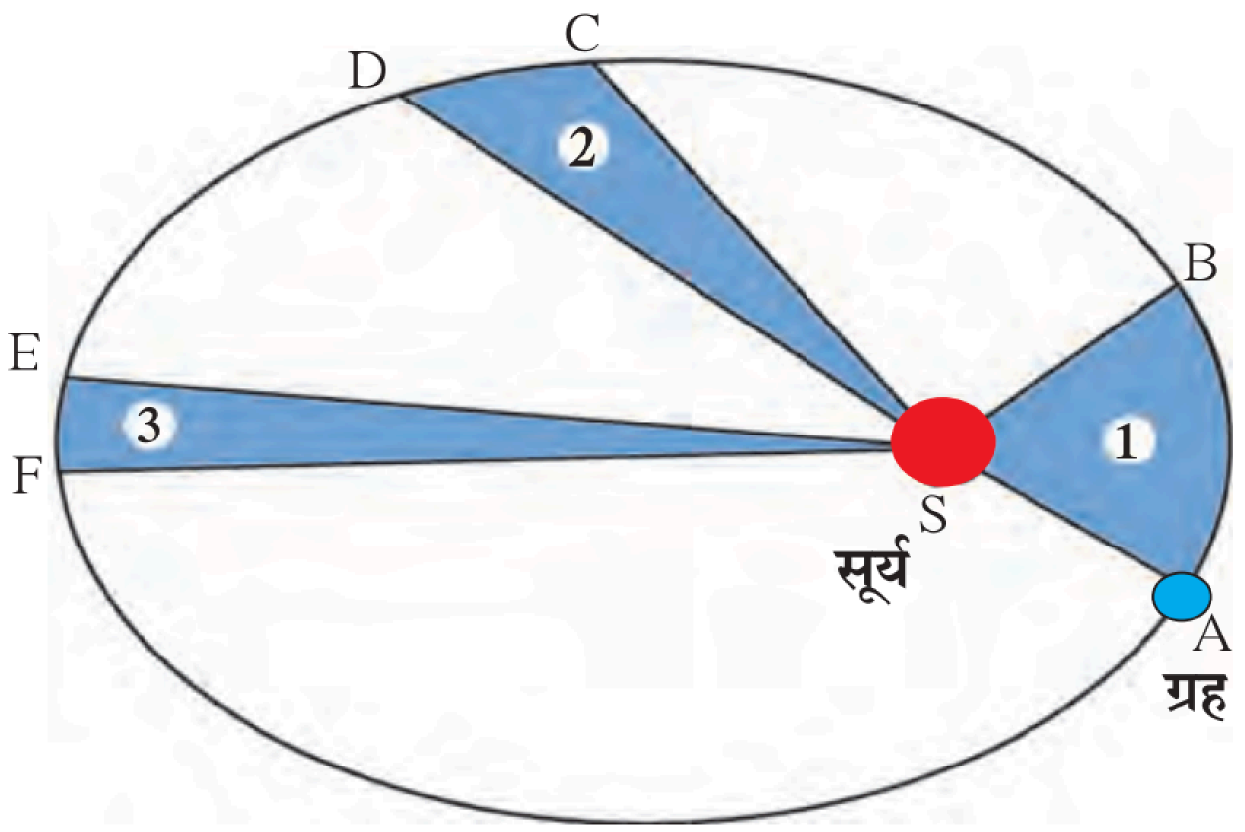
इ. केप्लरचे तीन नियम लिहा. त्यामुळे न्यूटनला आपला गुरुत्व सिद्धांत मांडण्यात कशी मदत झाली ?

उत्तर :

**केप्लरचे तीन नियम -** सोळाव्या शतकापर्यंत ग्रहांच्या स्थिती व गती विषयी उपलब्ध माहितीच्या आधारे योहानस केप्लर नामक शास्त्रज्ञाने ग्रहांचे गतिविषयक तीन नियम मांडले. ते खालीलप्रमाणे आहेत.

**केप्लरचा पहिला नियम -**

ग्रहाची कक्षा ही लंब वर्तुळाकार असून सूर्य त्या कक्षेच्या एका नाभिवर असतो.



S - सूर्य

A- ग्रह

**केप्लरचा दुसरा नियम -**

ग्रहाला सूर्याशी जोडणारी रेषा, ही समान कालावधीत समान क्षेत्रफळ व्यापन करते.

S ह्या सूर्याभोवती लंबवर्तुळाकार कक्षेत फिरणाऱ्या ग्रहास A पासून B पर्यंत जाण्यास लागणारा वेळ व C पासून D पर्यंत जाण्यास लागणारा वेळ समान असल्यास ASB, CSD ही क्षेत्रफळे समान असतात.

म्हणजेच SA ही रेषा समान कालावधीत समान क्षेत्रफळे व्यापन करते.

**केप्लरचा तिसरा नियम -**

सूर्याची परिक्रमा करणाऱ्या ग्रहाच्या आवर्तकालाचा वर्ग हा ग्रहाच्या सूर्यापासूनच्या सरासरी अंतराच्या घनाला समानुपाती असतो.

$T^2 \alpha\, r^3$ म्हणजेच $\frac{T^2}{r^3}$ = स्थिरांक

T – आवर्तकाल, r = सरासरी

केप्लरचा तिसरा नियम व न्यूटनचा गुरुत्व सिद्धांत

न्यूटनचा गुरुत्व सिद्धांत $F = \alpha \frac{m_1 m_2}{d^2}$ हा आहे.

हा सिद्धांत दोन ग्रहातील आकर्षण बल त्यांच्यातील अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणात असते, असे सांगतो. हा सिद्धांत मांडण्यासाठी न्यूटनला केप्लरच्या तीन नियमांची मदत झाली ते खालील विवेचनावरून स्पष्ट होईल.

समजा, M = सूर्याचे वस्तुमान   m = ग्रहाचे वस्तुमान

r = कक्षेची त्रिज्या   T = पृथ्वीची चाल

1) एक ग्रह वर्तुळावर कक्षेत सूर्याभोवती परिक्रमा करत असेल तर सूर्याच्या दिशेने प्रयुक्त होणारे अभिकेंद्री बल F $\frac{mV_c^2}{r}$ एवढे असते.

परंतु $V_c = \frac{2\pi r}{T}$

$F = \frac{m}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$

$F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$ ............ (1)

$\therefore T^2 \alpha r^3$

$T^2 = Kr^3$ ............ (2)

$F = \frac{4\pi^2 mr}{Kr^3}$ ........... (1) व (2) वरून

$F = \frac{4\pi^2 m}{K r^2}$ ............... (3)

K = स्थिरांक (सूर्याच्या वस्तुमानाशी निगडित)

$\therefore \frac{4\pi^2}{K} \alpha M$

$\frac{4\pi^2}{K} = GM$ ............. (4)

G = गुरुत्वीय स्थिरांक

$F = GM\frac{m}{r^2}$ $F \alpha \frac{1}{r^2}$

म्हणजेच दोन ग्रहामधील आकर्षण बल त्यातील अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणात बदलते. हाच न्यूटनचा गुरुत्व सिद्धांत होय.

ई. एक दगड u वेगाने वर फेकल्यावर h उंची पर्यंत पोचतो व नंतर खाली येतो. सिद्ध करा की त्याला वर जाण्यास जितका वेळ लागतो तितकाच वेळ खाली येण्यास लागतो.

उत्तर :

दगड वर जाताना, आरंभिचा वेग = u अंतिम वेग = v = o

कारण वर जाताना वेग कमी होत जातो व एका विशिष्ट उंचीवर अंतिम वेग शून्य होते व त्याक्षणी दगड खाली पडण्यास सुरुवात होते.

पदार्थाने गाठलेली उंची = h

पदार्थाचे त्वरण = a = - g

(येथे त्वरण ऋण घेतले आहे. कारण दगडाच्या गतीची दिशा व त्वरणाची दिशा विरुद्ध आहे.)

समजा, दगड वर जाण्यास लागणारा वेळ = $t_1$

आता $v = u + at$  $o = u - gt_1$ (किंमती दिल्या)

$\therefore\ t_1 = \frac{u}{g}$ ............ (i)

तसेच, $v^2 = u^2 + 2as$

$o = u^2 - 2gh$

$\therefore\ \mathbf{h} = \frac{u^2}{2g}$ .............. (ii)

आता दगड खाली येताना आरंभिचा वेग u = o

(कारण वस्तू वर जाताना विशिष्ट उंचीवर तिचा वेग शून्य होतो व त्या क्षणी वस्तू खाली पडण्यास सुरुवात होते. म्हणून आरंभिचा वेग u = o)

दगडाने कापलेले अंतर = h

समजा, दगड खाली पडण्यास लागलेलावेळ = $t_2$ त्वरण a = g
(येथे g धन घेतले कारण गतीची दिशा व त्वरणाची दिशा एकच आहे.)

$\therefore s = ut + \frac{1}{2}at_2^2$

$h = o \times t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$

$\therefore h = \frac{1}{2}gt_2^2$ ............ (iii)

विधान (ii) मधील h ची किंमत ठेवून

$\frac{u^2}{2g} = \frac{1}{2}gt_2^2 \quad t_2^2 = \frac{u^2}{g^2}$

$\therefore t_2 = \frac{u}{g}$ ............... (iv)

विधान (i) व (iv) वरून $t_1 = t_2$

∴ दगड वरजाण्यास लागणारा वेळ = दगड खाली पोहचण्यास लागलेला वेळ

**उ. समजा की g चे मूल्य अचानक दुप्पट झाले तर, एका जड वस्तूला जमिनीवरून ओढून नेणे दुपटीने अधिक कठीण होईल का ? का ?**

उत्तर :
होय, दुप्पटीने अधिक कठीण होईल. कारण .........
समजा, वस्तूचे वस्तुमान = $m_1$ व सुरुवातीचे गुरुत्वत्वरण = g
∴ वस्तूचे वजन $W = m_1\ g$ ............(i)
आता गुरुत्वत्वरण दुप्पट झाले.
∴ गुरुत्वत्वरण = 2g
∴ वस्तूचे वजन = $m_1 \times (2g)$
$= 2 \times (m_1 g)$
$= 2\ W$
∴ गुरुत्वत्वरण दुप्पट झाल्यास वस्तूचे वजन सुद्धा दुप्पट होते. त्यामुळे ती ओढून नेल्यास दुप्पटीने अधिक कठीण होईल.

### 3. पृथ्वीच्या केंद्रावर 'g' चे मूल्य शून्य असते याविषयी स्पष्टीकरण लिहा

उत्तर :

वस्तूवर कार्य करणाऱ्या पृथ्वीच्या गुरुत्वीय बलामुळे, वस्तूतः गुरुत्वीय त्वरण (g) निर्माण होते. आपण पृथ्वीच्या आत, पृथ्वीच्या केंद्राकडे जसजसे जातो. तसतसे, गुरुत्वीय त्वरण कमी कमी होत जाते व पृथ्वीच्या केंद्रावर हे मूल्य शून्य असते ह्याचा अर्थ असा नाही की पृथ्वीच्या केंद्रस्थानी गुरुत्वीय बल नसते. पृथ्वीच्या केंद्रस्थानी विविध दिशेंनी हे बल कार्य करीत असते व त्याचे परिणामी बल (Resultant Force) शून्य असते. त्यामुळे गुरुत्वीय त्वरण सुद्धा शून्य असते.

पृथ्वीच्या आत जसजसे जातो तसतसे आपण पृथ्वीच्या आत ओढले जातो. आपल्या सभोवताल सर्वत्र पृथ्वीचे कण-भाग असतात व न्यूटनच्या नियमानुसार कोणत्याही दोन कणांमध्ये गुरुत्वीय बल असते. ह्या विविध दिशेंनी कार्य करणाऱ्या बलांचे परिणामी बलाचे मूल्य कमी कमी होत जाते व पृथ्वीच्या केंद्रस्थानी शून्य असते. अर्थात गुरुत्वीय त्वरण सुद्धा शून्य असते.

तसेच $g = \frac{GM}{r^2}$ या सूत्राचा विचार करता पृथ्वीच्या केंद्राकडे जसजसे जावे तसतसे M व r चे मूल्य कमी कमी होत जाते. केंद्रस्थानी शून्य बनते म्हणून g चे केंद्रस्थानी मूल्य शून्य आहे.

4. सिद्ध करा की, एका ताऱ्यापासून R अंतरावर असलेल्या ग्रहाचा परिभ्रमणकाळ T आहे. तर तोच ग्रह 2R अंतरावर असल्यास परिभ्रमणकाळ √8T असेल.

उत्तर :

केप्लरच्या तिसऱ्या नियमानुसार

$\frac{T^2}{r^2}$ स्थिर T - ग्रहाचा परिभ्रमणकाळ, r - ताऱ्यापासूनचे अंतर

म्हणजेच $\frac{(T_1)^2}{(r_1)^3} = \frac{(T_2)^2}{(r_2)^3}$

या ठिकाणी $T_1$ = T $r_1$ = R व $r_1$ = 2R दिले असता $T_2$ चे मूल्य काढायचे आहे.

वरील सूत्रात किंमती ठेवून,

$\frac{T_1^2}{R^3} = \frac{(T_2)^2}{(2R)^3}$ $\therefore \frac{T_1^2}{R^3} = \frac{{T_2}^2}{8R^3}$

$\therefore T_2^2 = 8T_1^2$ $\therefore T_2^2 = 8\mathrm{T}^2$

परिभ्रमणकाळ $= \sqrt{8T}$

∴ अंतर दुप्पट झाल्यास कालावधी $\sqrt{8}$ पट होतो.

## 5. उदाहरणे सोडवा.

अ. जर एका ग्रहावर एक वस्तू 5m वरून खाली येण्यास 5 सेकंद घेत असेल तर त्या ग्रहावरील गुरुत्वत्वरण किती ?

उत्तर :

एका ग्रहावर S = 5m, t = 5s u = o

आता $S = ut + \frac{1}{2} at^2$

$5 = 0 \times 5 + \frac{1}{2} \times g \times 5^2$

$\frac{10}{25} = g \quad 0.4\, m/s^2 = g$

गुरुत्वत्वरण = $0.4\, m/s^2$

आ. ग्रह 'क' ची त्रिज्या 'ख' ग्रहाच्या त्रिज्येच्या अर्धी आहे. 'क' चे वस्तुमान $M_A$ आहे. जर 'ख' ग्रहावरील g चे मूल्य 'क' ग्रहावरील मूल्याच्या अर्धे असेल तर 'ख' ग्रहाचे वस्तुमान किती असेल ?

उत्तर :

समजा, 'ख' ग्रहाची त्रिज्या R आहे. म्हणून 'क' ग्रहाची त्रिज्या $\frac{1}{2}R$ असेल.
समजा, 'ख' ग्रहावरील g चे मूल्य g आहे. म्हणून 'क' ग्रहावरील g चे मूल्य 2g असेल. क ग्रहाचे वस्तुमान $M_A$ आहे.

समजा तर ख ग्रहाचे वस्तुमान $M_B$ आहे.

**ख ग्रहासाठी** - $g = \frac{GM}{R^2}$ ह्या सूत्रात किंमती ठेवून $g = \frac{GM_B}{R^2}$ ........... (i)

तसेच 'क' ग्रहासाठी सूत्रात किंमती ठेवून, $2g = \frac{GM_A}{(\frac{1}{2}R)^2}$ ............. (ii)

$g \div 2g = \frac{GM_B}{R^2} \div \frac{GM_A}{\frac{1}{2}R^2}$

$\frac{1}{2} = \frac{M_B}{4M_A}$

$\therefore 4M_A = 2M_B$

$\therefore M_B = 2M_A$

ख ग्रहाचे वस्तुमान क ग्रहाच्या वस्तुमानाच्या दुप्पट आहे.

इ. एका वस्तूचे वस्तुमान व पृथ्वीवरील वजन अनुक्रमे 5kg व 49N आहेत. जर चंद्रावर g चे मूल्य पृथ्वीच्या एक षष्ठांश असेल, तर त्या वस्तूचे वस्तुमान व वजन चंद्रावर किती असेल ?

उत्तर :

वस्तूचे वस्तुमान सर्वत्र सारखे असते.

∴ चंद्रावरील वस्तुमान = पृथ्वीवरील वस्तुमान = 5kg

आता वजन W = mg पृथ्वीसाठी $W_E = 5 \times g$ .......... (i)

चंद्रासाठी गुरुत्वीय त्वरण = $\frac{1}{2}g$

∴ $W_M = 5 \times \frac{1}{2} \times g$

$= \frac{1}{2}(5g)$ .............. (ii)

विधान (i) व (ii) वरून, $W_M = \frac{1}{2}W_E$

चंद्रावरील वजन = $\frac{1}{6}$ पृथ्वीवरील वजन

∴ चंद्रावरील वजन = $\frac{1}{6} \times 49N = 8.17N$

ई. एक वर फेकलेली वस्तू 500 मी. उंचीपर्यंत जाते. तिचा आरंभीचा वेग किती असेल ? त्या वस्तूस वर जाऊन खाली येण्यास किती वेळ लागेल ? ($g = 10\ m/s^2$)

उत्तर :

S = 500 m  वस्तू 500 m वर जाऊन खाली येते.

अंतिम वेग V = o

गुरुत्व त्वरण $g = 10\ m/s^2$

येथे g ऋण आहे. कारण त्वरणाची दिशा व गतिची दिशा एकमेकांच्या विरुद्ध आहेत.

आता $v^2 = u^2 + 2as$

$o = u^2 + 2 \times (-10) \times 500$

$\therefore o = u^2 - 10000$

u = 100 m/s

तसेच v = u + at

$o = 100 + (-10) \times t$

$\therefore t = 10\ s$

∴ वर जाण्यास लागणारा वेळ =  10 s

खाली येण्यास लागणारा वेळ = 10 s

एकूण वेळ = 20 s

उ. एक चेंडू टेबलावरून खाली पडतो व 1 सेकंदात जमिनीवर पोचतो. g = 10 m/s² असेल, तर टेबलाची उंची व चेंडूचा जमिनीवर पोहोचतानाचा वेग किती असेल ?

उत्तर :

t = 1s  g= 10m/s  आरंभीचा वेग = u = 0

आता $S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$S = 0 \times 1 + \frac{1}{2}(10) \times 1^2$

S = 5m

टेबलाची उंची 5 मीटर

तसेच V = u + at = 0 + 10 x 1 = 10 m/s

चेंडू जमिनीवर पडतानाचा वेग 10 m/s

ऊ. पृथ्वी व चंद्र यांची वस्तुमाने अनुक्रमे $6 \times 10^{24}$kg व $7.4 \times 10^{22}$kg आहेत व त्या दोन्हीमधील अंतर $3.84 \times 10^{5}$km आहे. त्या दोन्ही मधील गुरुत्व बल किती असेल ? दिलेले $G = 6.7 \times 10^{-11}\ Nm^2/Kg^2$

उत्तर :

$M_E = 6 \times 10^{24}$ kg

$M_M = 7.4 \times 10^{22}$ kg

d = $3.84 \times 10^{5}$ km

= $3.84 \times 10^{5} \times 10^{3}$ m

आता न्यूटनच्या नियमानुसार, $F = \frac{GM_EM_M}{d^2}$

$$F = \frac{6.7 \times 10^{-11}\ 6 \times 10^{24}\ 7.4 \times 10^{22}}{(3.84 \times 10^{8})^2}$$

$$F = \frac{6.7 \times 6 \times 7.4}{3.84 \times 3.84}$$

N = $20.1742 \times 10^{19}$ N

= $2 \times 10^{20}$N

= $2 \times 10^{20}$N

आकर्षण बल = $2 \times 10^{20}$N

ए. पृथ्वीचे वजन 6 x $10^{24}$kg आहे व तिचे सूर्यापासूनचे अंतर 1.5 x $10^{11}$m आहे. जर दोन्हीमधील गुरुत्व बल 3.5 x $10^{22}$N असेल तर सूर्याचे वस्तुमान किती ?

उत्तर :

न्यूटनच्या नियमनुसार $F = \frac{(Gm_1m_2)}{d^2}$

$m_1$ = पृथ्वीचे वस्तुमान 6 x $10^{24}$ kg

$m_2$ = सूर्याचे वस्तुमान (किती)

G = 6.7 x $10^{-11}Nm^2/kg^2$

F = 3.5 x $10^{22}$ N

d = 1.5 x $10^{11}$

वरील सूत्रात किंमती दिल्या .

$$3.5 \times 10^{22} = \frac{6.7 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{(1.5 \times 10^{11})^2} \times m_2$$

$$m_2 = \frac{3.5 \times 10^{22} \times (1.5 \times 10^{11})^2}{6.7 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}$$

$$= \frac{3.5 \times 1.5^2}{6.7 \times 6} \times 10^{31}$$

= 0.196 x $10^{31}$

= 0.196 x $10^{31}$ kg

सूर्याचे वस्तुमान = 1.96 x $10^{31}$ kg